

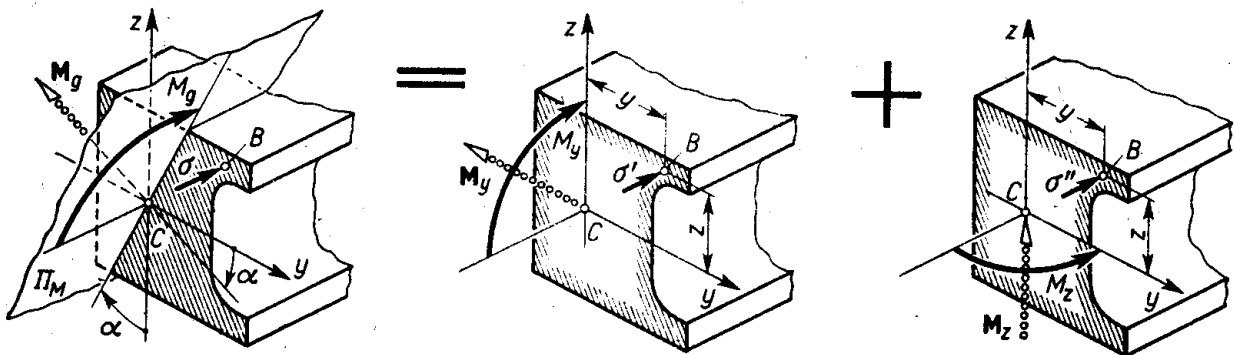
# 6 ZŁOŻONE ZAGADNIENIA ZGINANIA

## 6.1. Zginanie ukośne

Z artykułu 5.5 wiemy, że zgięciem ukośnym jest przypadek, gdy płaszczyzna  $\Pi_M$  działania momentu  $M_g$  nie pokrywa się z żadną z dwóch głównych centralnych osi  $y$  i  $z$  przekroju (rys. 6.1). Przypadek taki sprowadzamy do superpozycji dwóch zgięć prostych, rozkładając wypadkowy wektor  $M_g$  na składowe momenty

$$M_y = M_g \cos \alpha, \quad M_z = M_g \sin \alpha, \quad (a)$$

których wektory pokrywają się z osiami  $y$  i  $z$ . Każdy z tych momentów wywołuje zginanie proste, z tym że przy działaniu  $M_y$  śladem warstwy obojętnej jest oś  $y$ , a przy działaniu



Rys. 6.1. Rozkład zginania ukośnego na dwa proste

$M_z$  — oś  $z$ . Uwzględniając to, możemy z wzoru (5.14) określić dla każdego z tych przypadków naprężenia normalne  $\sigma'$  i  $\sigma''$  działające na ten sam element  $B$  przekroju. Dostosowując wzór (5.14) do oznaczeń z rys. 6.1 mamy

$$\sigma' = -M_y z / J_y, \quad \sigma'' = -M_z y / J_z. \quad (b)$$

Przy jednoczesnym działaniu  $M_y$  i  $M_z$  naprężenie  $\sigma$  w elemencie  $B$  jest, zgodnie z zasadą superpozycji,

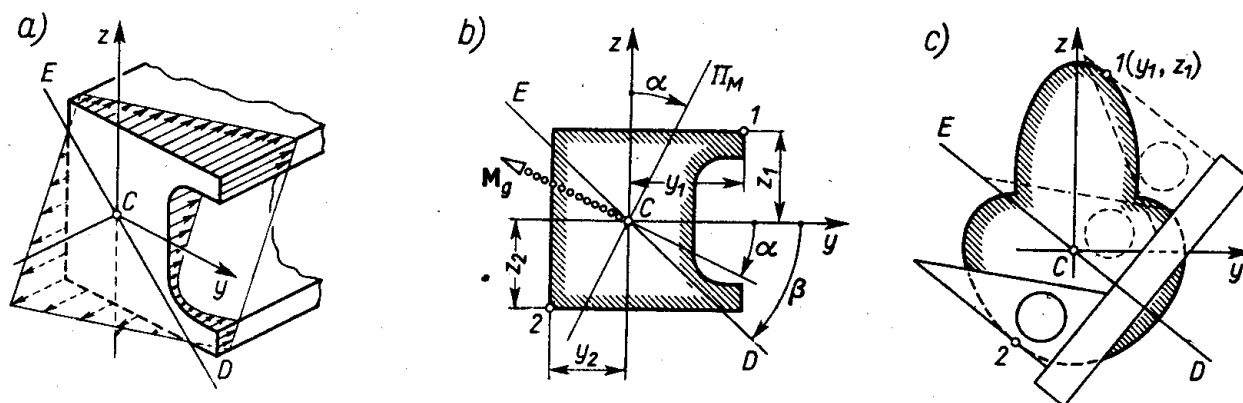
$$\sigma = -\frac{M_y z}{J_y} - \frac{M_z y}{J_z} \quad (6.1a)$$

i odpowiada działaniu wypadkowego momentu  $M_g$ . Uwzględniając ponadto wzór (a)

możemy zamiast (6.1a) napisać

$$\sigma = - \frac{M_g z \cos \alpha}{J_y} - \frac{M_g y \sin \alpha}{J_z}. \quad (6.1b)$$

Tak więc przy zginaniu ukośnym naprężenie  $\sigma$  jest liniową funkcją współrzędnych  $y$  i  $z$  badanego punktu przekroju. Jeśli z każdego punktu przekroju wystawić prostopadły



Rys. 6.2. Obraz naprężeń przy zginaniu ukośnym i określeniu punktów o ekstremalnych naprężeniach

wektor  $\sigma$ , to końce tych wektorów utworzą płaszczyznę (rys. 6.2a) przecinającą płaszczyznę przekroju wzdłuż prostej  $ECD$ . Prosta ta jest śladem warstwy obojętnej, czyli *osią obojętną*. Jej równanie otrzymujemy wstawiając  $\sigma = 0$  do wzoru (6.1b), tj.

$$z = -y \frac{J_y}{J_z} \operatorname{tg} \alpha. \quad (6.2)$$

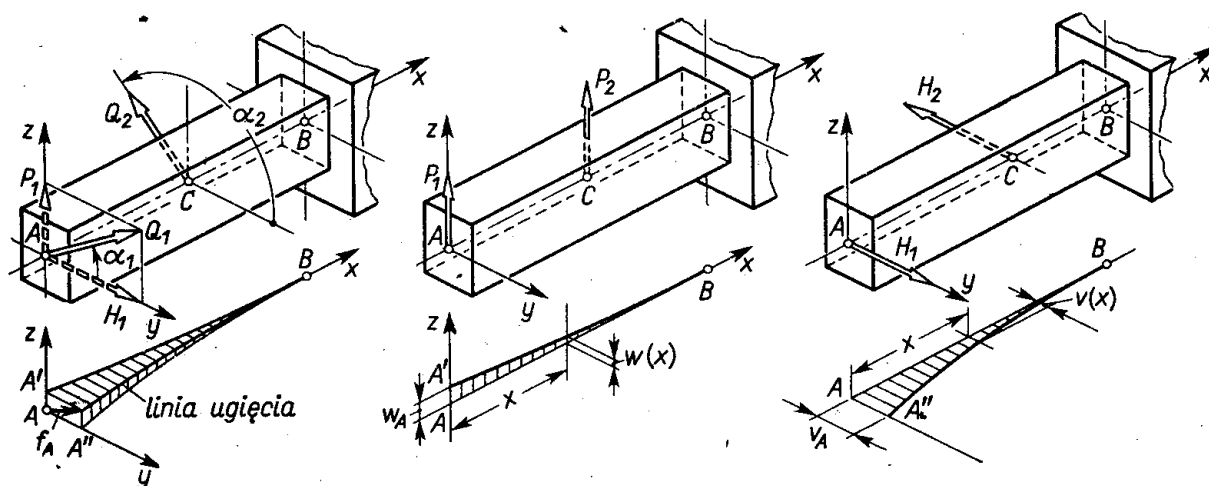
Jak widać, oś obojętna przechodzi przez początek układu, tj. środek ciężkości przekroju. Jeśli  $J_y \neq J_z$ , to jej kierunek *nie pokrywa się* z kierunkiem wektora  $M_g$  i warstwa obojętna nie jest prostopadła do płaszczyzny  $\Pi_M$  działania momentu  $M_g$ , lecz jest obrócona w stronę osi głównej odpowiadającej najmniejszemu momentowi bezwładności<sup>(1)</sup> (rys. 6.2b). W przypadku  $J_y = J_z$  warstwa obojętna zostaje prostopadła do płaszczyzny  $\Pi_M$ . Dla takiego przekroju każda oś centralna jest główna (art. 4.4) i zgięcie zawsze jest proste.

Znając położenie osi obojętnej możemy łatwo określić ekstremalne wartości naprężeń  $\sigma_e$ . Skoro końce wektorów  $\sigma$  tworzą płaszczyznę (rys. 6.2a), to warstwicę tej płaszczyzny, a więc linie  $\sigma = \text{const}$ , są równoległe do osi obojętnej  $ECD$ . Im rzędna warstwiczy jest większa, tym ta warstwica leży dalej od linii  $ECD$ . Wynika stąd, że punktami przekroju (rys. 6.2b), w których działają  $\sigma_e$ , są punkty 1 i 2, których odległość od osi obojętnej jest największa. Wartości  $\sigma_e$  otrzymamy wstawiając do (6.1b) ich współrzędne  $y_1, z_1$  oraz  $y_2, z_2$ , przy czym współrzędne te są wielkościami algebraicznymi i na przykład  $y_1 > 0, z_1 > 0$ , ale  $y_2 < 0$  i  $z_2 < 0$ .

W przekrojach bardziej złożonych dla wyznaczenia współrzędnych punktów najbardziej odległych od osi obojętnej  $ECD$  stosujemy z reguły sposób wykreślny, którego istotę wyjaśnia rys. 6.2c.

<sup>(1)</sup> Jeśli  $J_y > J_z$ , to  $\operatorname{tg} \beta = (J_y/J_z) \operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \alpha$ , skąd  $\beta > \alpha$ .

Linie ugięcia belki ukośnie zginanej najłatwiej jest wyznaczyć stosując, jak poprzednio, zasadę superpozycji. Biorąc przykładowo wspornikową belkę (rys. 6.3), w której główne centralne osie  $y$  i  $z$  są znane, i rozdzielając obciążenia  $Q_1$  i  $Q_2$  na działające w płaszczyźnie



Rys. 6.3. Określenie linii ugięcia przez superpozycję

$xz$ , tj.  $P_1$  i  $P_2$ , i  $yz$ , tj.  $H_1$  i  $H_2$ , mamy w każdym z tych dwóch przypadków do czynienia ze zgięciem prostym w odpowiedniej płaszczyźnie, a więc z powtórzeniem znanych już z art. 5.8 i 5.9 zagadnień. Wypadkowe ugięcie  $f_x$  w przekroju określonym odciętą  $x$  jest równe geometrycznej sumie ugięć  $w(x)$  i  $v(x)$ , a jego wartość

$$f_x = \sqrt{v^2(x) + w^2(x)}. \quad (c)$$

Przy zginaniu ukośnym linia ugięcia belki jest na ogół krzywą przestrzenną i staje się płaską tylko wtedy, gdy stosunek ugięć  $v(x)/w(x)$  jest niezależny od  $x$ . W belkach pryzmatycznych i przy jednakowych warunkach podparcia w obydwóch płaszczyznach  $xz$  i  $yz$  zachodzi to wtedy, gdy wszystkie siły obciążające działają w jednej płaszczyźnie. W omawianym przykładzie (rys. 6.3) warunek ten sprowadza się do równości  $\alpha_1 = \alpha_2$ .

W przeprowadzonej analizie przyjęto, że usytuowanie głównych centralnych osi jest znane. Dla belek o przekroju niesymetrycznym pociąga to konieczność całej procedury opisaney w art. 4.4. Powstaje pytanie, czy tej operacji wyznaczania głównych centralnych osi nie można ominąć. Innymi słowy, chcemy określić naprężenia  $\sigma$  w danym przekroju belki (rys. 6.4a) znając  $J_y$ ,  $J_z$  oraz  $J_{yz}$  względem centralnych, lecz niegłównych osi  $y$ ,  $z$  i momenty  $M_y$ ,  $M_z$ . Aby rozwiązać to zadanie, wykorzystajmy znany już fakt, że końce wektorów  $\sigma$  tworzą płaszczyznę przechodzącą przez początek układu. Równanie tej płaszczyzny jest więc

$$\sigma = B_z z + B_y y, \quad (d)$$

gdzie  $B_z$ ,  $B_y$  nieznane na razie współczynniki. Aby je określić, wykorzystajmy to, że moment względem osi  $y$  wszystkich elementarnych sił  $\sigma dA$  musi być równy wypadkowemu momentowi  $M_y$ , a względem osi  $z$  momentowi  $M_z$ . Wynikają stąd dwie zależności

$$-\int_A \sigma dA z = M_y, \quad -\int_A \sigma dA y = M_z. \quad (e)$$

Podstawiając do zależności (e)  $\sigma$  według wzoru (d)

$$B_z \int_A z^2 dA + B_y \int_A yz dA = -M_y, \quad B_z \int_A yz dA + B_y \int_A y^2 dA = -M_z$$

po uwzględnieniu znanych z rozdz. 4 definicji

$$J_y = \int_A z^2 dA, \quad J_{yz} = \int_A yz dA, \quad J_z = \int_A y^2 dA$$

otrzymujemy następujące dwa równania:

$$B_z J_y + B_y J_{yz} = -M_y, \quad B_y J_{yz} + B_z J_z = -M_z,$$

których rozwiązanie względem  $B_z$  i  $B_y$  daje wynik

$$B_z = -\frac{M_y - (M_z J_{yz}/J_z)}{J_y [1 - (J_{yz}^2/J_y J_z)]}, \quad B_y = -\frac{M_z - (M_y J_{yz}/J_y)}{J_z [1 - (J_{yz}^2/J_y J_z)]}. \quad (f)$$

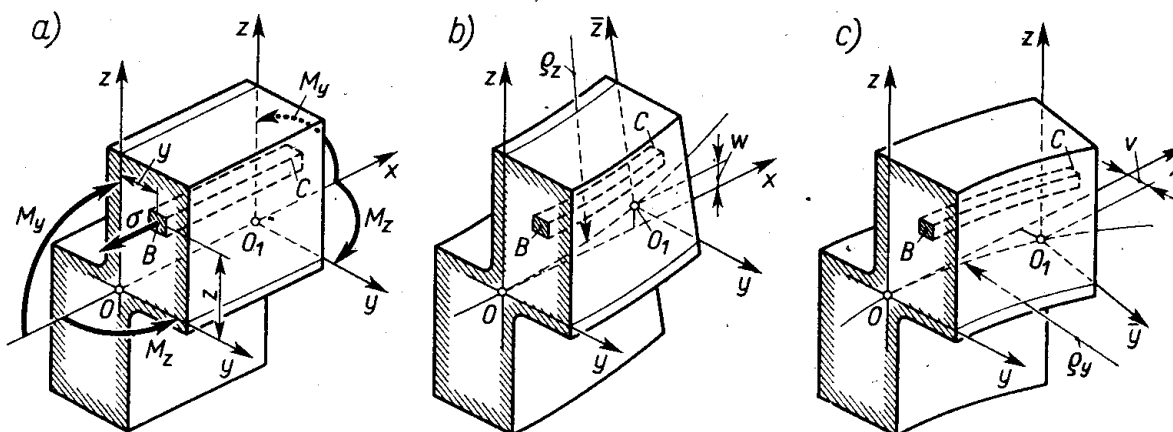
Aby uprościć te wyrażenia, wprowadzamy pomocnicze wielkości

$$\mathfrak{M}_y = \kappa \left( M_y - M_z \frac{J_{yz}}{J_z} \right), \quad \mathfrak{M}_z = \kappa \left( M_z - M_y \frac{J_{yz}}{J_y} \right), \quad \frac{1}{\kappa} = 1 - \frac{J_{yz}^2}{J_y J_z}. \quad (6.3)$$

Dzięki temu równanie (d) przyjmuje postać

$$\sigma = -\frac{\mathfrak{M}_y z}{J_y} - \frac{\mathfrak{M}_z y}{J_z}, \quad (6.4)$$

przypominającą wzór (6.1a) i przechodzącą w niego, gdy osie  $y, z$  są główne, czyli  $J_{yz} = 0$ . W tym ujęciu wzór (6.1a) można traktować jako szczególny przypadek zależności (6.4). Dalsze etapy badania naprężeń, a więc wyznaczenie osi obojętnej i ekstremalnych wartości  $\sigma$  przebiegają identycznie jak poprzednio.



Rys. 6.4. Analiza ukośnego zginania w układzie osi niegłównych

Aby określić ugięcia belki w układzie niegłównych osi  $y$  i  $z$ , wyznaczmy najpierw względne odkształcenia  $\varepsilon^*$  pewnego włókna  $BC$  przy wymuszonym zgięciu w płaszczyźnie  $xz$  (rys. 6.4b). Obraz odkształceń jest identyczny z pokazanym na rys. 5.29, wobec czego z wzoru (5.7) mamy

$$\varepsilon^* = -z/\varrho_z,$$

gdzie  $\rho_z$  — promień krzywizny osi  $OO_1$  w płaszczyźnie  $xz$ . Podobnie przy zgięciu w płaszczyźnie  $xy$  (rys. 6.4c) otrzymamy dla badanego włókna

$$\varepsilon^{**} = -y/\rho_y.$$

Przy jednoczesnym zgięciu w obydwóch płaszczyznach całkowite wydłużenie  $\varepsilon = \varepsilon^* + \varepsilon^{**}$ . Uwzględniając ponadto, że ugięcia belki są małe, możemy podobnie jak w art. 5.8 napisać

$$1/\rho_z \approx w'', \quad 1/\rho_y \approx v'',$$

gdzie  $w$  i  $v$  są odpowiednio przemieszczeniami punktu osi w płaszczyznach  $xz$  i  $xy$ . W rezultacie mamy

$$\varepsilon = -zw'' - yv''. \quad (g)$$

Odpowiadające temu odkształceniu naprężenie

$$\sigma = E\varepsilon = -Ew''z - Ev''y \quad (h)$$

musi być dla wszystkich możliwych wartości  $y$  i  $z$  tożsamościowo równe wartości  $\sigma$  określonej wzorem (6.4), skąd wynikają zależności

$$w''(x) = \frac{\mathfrak{M}_y}{EJ_y}, \quad v''(x) = \frac{\mathfrak{M}_z}{EJ_z}, \quad (6.5)$$

wyrażające drugie pochodne wielkości  $v$  i  $w$  w funkcji pomocniczych wielkości  $\mathfrak{M}_y$ ,  $\mathfrak{M}_z$  i  $x$  określonych poprzednio i związanych z obciążeniem i geometrycznymi własnościami przekroju. Tak więc określenie linii ugięcia w układzie osi niegłównych sprowadza się do identycznych równań jak w przypadku zgięcia prostego, z tym tylko, że zamiast rzeczywistych momentów gnących  $M_y$  i  $M_z$  wchodzi wielkości pomocnicze  $\mathfrak{M}_y$  i  $\mathfrak{M}_z$  mające ten sam wymiar, tj. Nm, co i momenty gnące. Jeśli więc określimy przebieg  $\mathfrak{M}_y(x)$  i  $\mathfrak{M}_z(x)$ , to linię ugięcia można wyznaczyć analitycznie lub wykreślić wykorzystując wszystkie nabyte poprzednio wiadomości.

Podany powyżej drugi wariant analizy zginania ukośnego jest lepszy od pierwszego wtedy, gdy układ niegłównych osi  $y$ ,  $z$  jest w jakiś szczególny sposób wyróżniony spośród innych. Taką sytuację mamy na przykład w profilu zetowym, kątowniku itp.

## Zadania

1. Na wspornikową belkę o przekroju skrzyńkowym działa prostopadła do csi siła  $P = 4$  kN (rys. 6.5) o zmiennym kierunku ( $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ). Obliczyć maksymalne naprężenie w niebezpiecznym przekroju belki. Wyznaczyć tor punktu  $A$ , gdy  $\alpha$  zmienia się od 0 do  $2\pi$ .

Odp. Niebezpieczny jest przekrój  $B$ , albowiem i  $M_y$ , i  $M_z$  są tam ekstremalne. Z kolei w tym przekroju niebezpieczny jest punkt  $I$  o współrzędnych  $y_1 = 5$  cm i  $z_1 = 7,5$  cm. Podstawiając do (6.1a)  $M_y = 4000 \cdot 1,5 \cos \alpha$ ,  $M_z = 4000 \cdot 1,5 \sin \alpha$ ,  $J_y = 753$  cm<sup>4</sup>,  $J_z = 399$  cm<sup>4</sup> oraz  $y_1$  i  $z_1$  mamy w wyniku

$$\sigma_s = -59,8 \cos \alpha - 75,3 \sin \alpha = -96,1 \sin(\alpha + 38,5^\circ) \text{ MPa}.$$

Tak więc maksymalne  $\sigma_s$  są  $\pm 96,1$  MPa i występują, gdy  $\alpha = 231,5^\circ$  lub  $\alpha = 51,5^\circ$ . Te same maksymalne naprężenia, tylko przesunięte w fazie, wystąpią w narożach 2, 3 i 4 przekroju  $B$ .

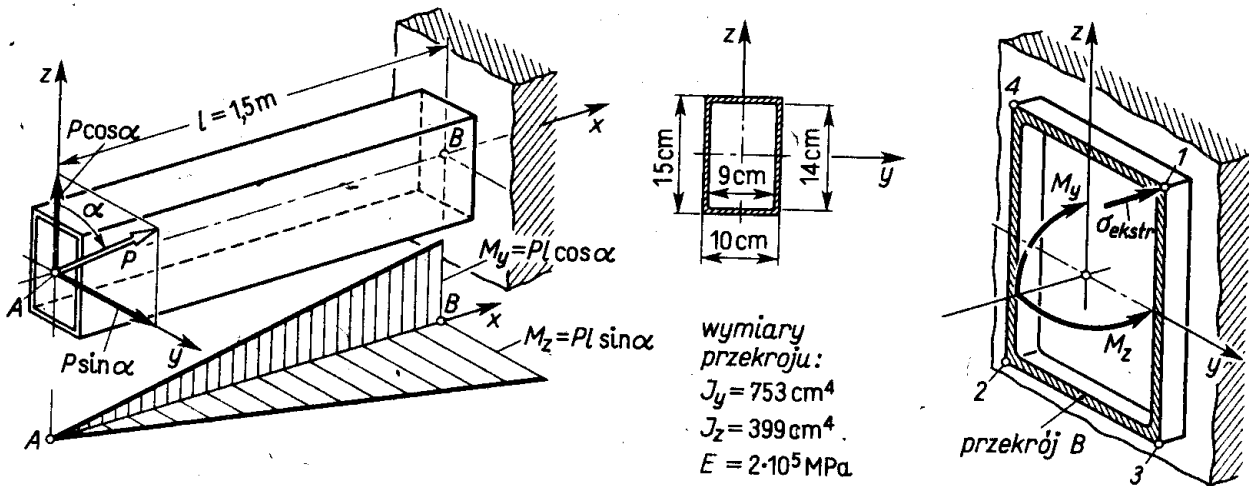
Ugięcia  $w_A$  i  $v_A$  (rys. 6.3) według wzoru (5.25) są (w mm)

$$w_A = P \cos \alpha l^3 / 3EJ_y = 3,00 \cos \alpha, \quad v_A = P \sin \alpha l^3 / 3EJ_z = 5,65 \sin \alpha.$$

Po wyrugowaniu kąta  $\alpha$  otrzymujemy stąd

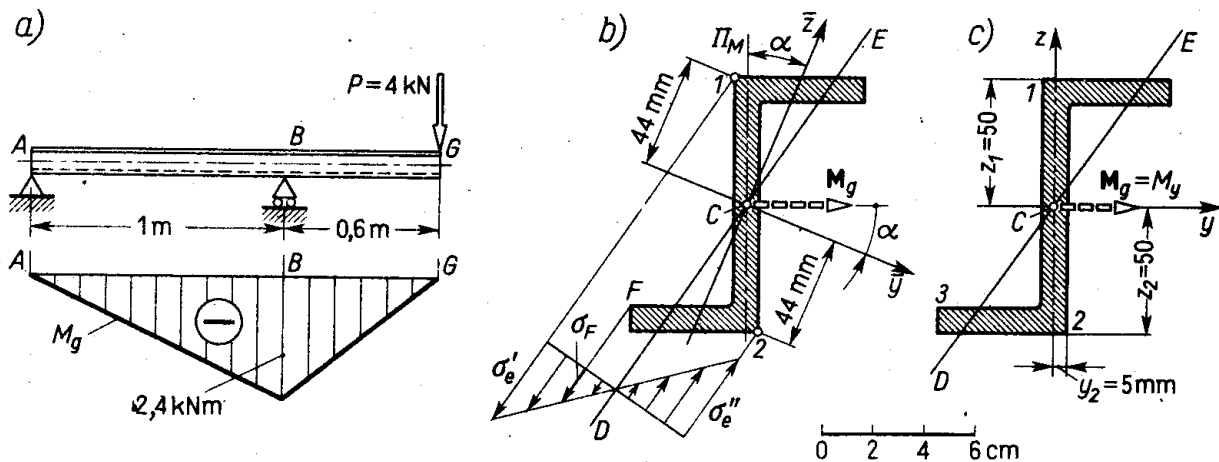
$$(w_A/3,00)^2 + (v_A/5,65)^2 = 1,$$

a więc tor punktu  $A$  jest elipsą o półosiach 5,65 mm i 3,00 mm.



Rys. 6.5. Przykład analizy zginania ukośnego w układzie osi głównych

2. Wyznaczyć  $\sigma_e$  w niebezpiecznym przekroju belki (rys. 6.6). Dane główne centralne momenty  $J_y = 283 \text{ cm}^4$ ,  $J_z = 25 \text{ cm}^4$  oraz  $\alpha = 22,2^\circ$ .



Rys. 6.6. Konfrontacja metod analizy zginania ukośnego

a) szkic belki; b) układ głównych, centralnych osi  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$ ; c) układ osi  $y$ ,  $z$  z centralnych, lecz niegłównych.

Rozwiązanie. Ekstremalny moment gnący ( $M_g$ ) = 2400 N m działa w przekroju  $B$ , jego wektor jest do płaszczyzny rysunku prostopadły. Po narysowaniu tego przekroju, umiejscowieniu głównych osi  $\bar{y}$  i  $\bar{z}$  oraz wektora  $M_g$  (rys. 6.6b) określamy z (6.2) położenie osi obojętnej  $ECD$ , a mianowicie<sup>(1)</sup>

$$\bar{z} = -\bar{y} (283/25) \operatorname{tg} (-22,2^\circ) = 4,61\bar{y},$$

a więc oś ta biegnie w  $I$  i  $III$  ćwiartce układu osi  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$ . W porównaniu z  $M_g$  jest ona obrócona w stronę osi  $\bar{z}$ , bo  $J_z < J_y$ . Widać, że najbardziej odległe od osi  $ECD$  są punkty  $I$  i  $2$ , których współrzędne odczytane z rysunku są  $\bar{y}_1 = -\bar{y}_2 = -2,4 \text{ cm}$ ,  $\bar{z}_1 = -\bar{z}_2 = 4,4 \text{ cm}$ . Podstawiając te dane do wzoru (6.1b) przy uwzględnieniu, że  $M_g < 0$  (przeciwnie niż na rys. 6.1), mamy

$$\sigma'_e = 122 \text{ MPa}, \quad \sigma''_e = -122 \text{ MPa}$$

<sup>(1)</sup> Kąt  $\alpha = -22,2^\circ < 0$ , gdyż jest przeciwny do podanego na rys. 6.1.

odpowiadające punktom 1 i 2. Dla innych punktów, np. punktu  $F$ , wartość  $\sigma_F$  odczytujemy z wykresu podającego rozkład naprężeń w kierunku prostopadłym do osi obojętnej.

Przerobiony przykład unaocznia nieodzowne w zagadnieniach zginania ukośnego operowanie rysunkiem przekroju. Szczególnie ważne jest prawidłowe naniesienie kierunków głównych centralnych osi i wektora momentu  $M_p$ .

3. Powtórzyć zadanie 2, stosując układ osi  $y, z$ , centralnych niegłównych (rys. 6.6c). Dane  $J_y = 246 \text{ cm}^4$ ,  $J_z = 61,5 \text{ cm}^4$ ,  $J_{yz} = 90 \text{ cm}^4$ .

Rozwiązanie. W takim układzie osi:  $M_y = -2400 \text{ N m}$ ,  $M_z = 0$  (rys. 6.4a). Wielkości pomocnicze obliczone z (6.3) są

$$\kappa = 2,15, \quad \mathfrak{M}_y = -5,16 \text{ kNm}, \quad \mathfrak{M}_z = 1,89 \text{ kNm},$$

i po podstawieniu ich do wzoru (6.4) mamy

$$\sigma = 2100z - 3070y \quad (\text{MPa, gdy } y \text{ i } z \text{ w m}).$$

Równanie osi obojętnej  $ECD$  otrzymamy biorąc  $\sigma = 0$ , skąd

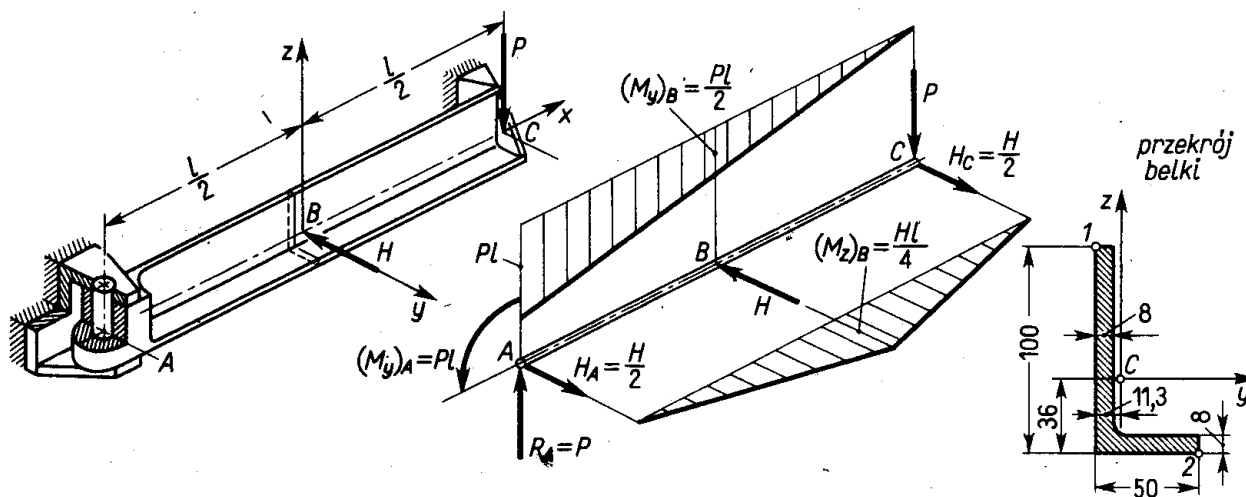
$$z = 1,46y,$$

której przebieg jest taki sam jak na rys. 6.6b. Naprężenie  $\sigma_e$  w punkcie 1 ( $y_1 = -0,5 \text{ cm}$ ,  $z_1 = 5,0 \text{ cm}$ ) jest

$$\sigma_e = 2100 \cdot 5 \cdot 10^{-2} + 3070 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2} \approx 121 \text{ MPa}$$

i w granicach błędów rachunkowych pokrywa się z wynikiem poprzednim.

4. Udowodnić (bez rachunków), że przy ukośnym zginaniu pryzmatycznej belki obciążonej tylko siłami skupionymi bądź momentami (rys. 6.7) niebezpieczny jest jeden z przekrojów  $A, B, C$ , a nie żaden pośredni.



Rys. 6.7. Przykład liczbowy; określenie reakcji i  $M_y$  oraz  $M_z$

Dane:  $P = 2 \text{ kN}$ ,  $H = 2 \text{ kN}$ ,  $l = 1 \text{ m}$ ,  $J_y = 116 \text{ cm}^4$ ,  $J_z = 19,5 \text{ cm}^4$ ,  $J_{yz} = -26,7 \text{ cm}^4$ ,  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ .

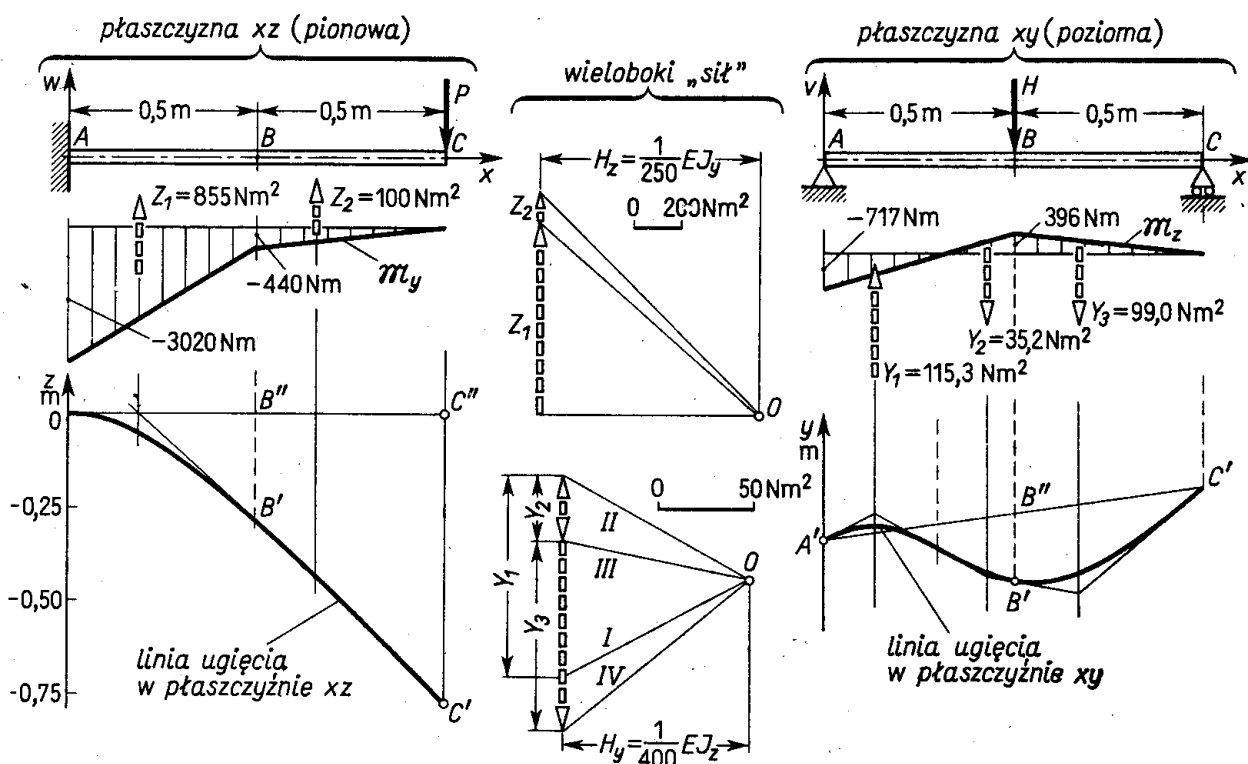
Rozwiązanie. Przy takim obciążeniu na kolejnych odcinkach belki momenty  $M_y$  i  $M_z$  oraz utworzone z nich  $\mathfrak{M}_y$  i  $\mathfrak{M}_z$  są liniowymi funkcjami  $x$ . Naprężenie  $\sigma$  w pewnym włóknie ( $y = \text{const}$ ,  $z = \text{const}$ ) na danym odcinku jest też liniową funkcją  $x$ , a więc mającą ekstremum na końcu lub początku tego odcinka, czyli w przekroju przyłożenia obciążenia, c.b.d.d. Spostrzeżenie to ogranicza liczbę koniecznych do zbadania przekrojów belki.

5. Obliczyć  $\sigma_e$  w przekroju  $B$  belki z rys. 6.7.

Odp.  $M_y = -1 \text{ kN m} < 0$ ,  $M_z = 0,5 \text{ kN m} > 0$  (porównaj rys. 6.4a); wielkości pomocnicze  $\kappa = 1,510$ ,  $\mathfrak{M}_y = -440 \text{ N m}$ ,  $\mathfrak{M}_z = 396 \text{ N m}$ ; z wzoru (6.4)  $\sigma = 379z - 2030y$  (MPa, gdy  $y$  i  $z$  w m); równanie osi obojętnej  $z = 5,35y$ , niebezpieczny jest punkt 2 ( $y = 3,87 \text{ cm}$ ,  $z = -3,6 \text{ cm}$ ), w którym  $\sigma_e = 92,3 \text{ MPa}$ .

6. Wyznaczyć linię ugięcia belki (rys. 6.7). W płaszczyźnie  $xz$  belka ta jest wspornikowa utwierdzona w  $A$ , w płaszczyźnie  $yz$  jest ona belką na podporach  $A$  i  $C$ .

Rozwiązanie. Warunki podparcia wyróżniają tu szczególnie układ osi niegłównych  $y, z$  i dlatego wykorzystamy metodę wykreślną opierając się na wzorach (6.5). Wykresy  $\mathcal{M}_y$  i  $\mathcal{M}_z$  są złożone z odcinków prostych (zadanie 4) i do ich określenia wystarczy znać rzędne w przekrojach  $A, B, C$ . W przekroju  $C$  jest  $(\mathcal{M}_y)_C = (\mathcal{M}_z)_C = 0$ . W przekroju  $B$  jest  $(\mathcal{M}_y)_B = -440 \text{ N m}$ ,  $(\mathcal{M}_z)_B = 396 \text{ N m}$  (zadanie 5), wreszcie w przekroju  $A$  jest  $(\mathcal{M}_y)_A = -3020 \text{ N m}$  i  $(\mathcal{M}_z)_A = -717 \text{ N m}$ , gdyż  $M_y = -2 \text{ kN m}$ , a  $M_z = 0$ . Mając te dane budujemy wykresy  $\mathcal{M}_y(x)$  i  $\mathcal{M}_z(x)$  (rys. 6.8) i znaną już metodą



Rys. 6.8. Przykład liczbowy: wykreślnie wyznaczenie linii ugięcia

wykreślną wyznaczamy linie ugięcia w obydwóch płaszczyznach, przy czym przyjęto zamiast rzeczywistych  $EJ_y = 2,32 \cdot 10^5 \text{ N m}^2$  i  $EJ_z = 0,39 \cdot 10^5 \text{ N m}^2$  odpowiednie sztywności 250 i 400 razy mniejsze. Dla przykładu przeliczmy ugięcie w przekroju  $B$ . W płaszczyźnie  $xz$  odcinek  $B''B'$  w skali rysunku belki jest 27,5 cm, a w płaszczyźnie  $xy$  jest 18 cm, skąd otrzymujemy

$$w_B = 27,5/250 = 1,10 \text{ mm}, \quad v_B = 18/400 = 0,45 \text{ mm},$$

a wypadkowe przemieszczenie

$$f_B = \sqrt{v_B^2 + w_B^2} = 1,19 \text{ mm}.$$

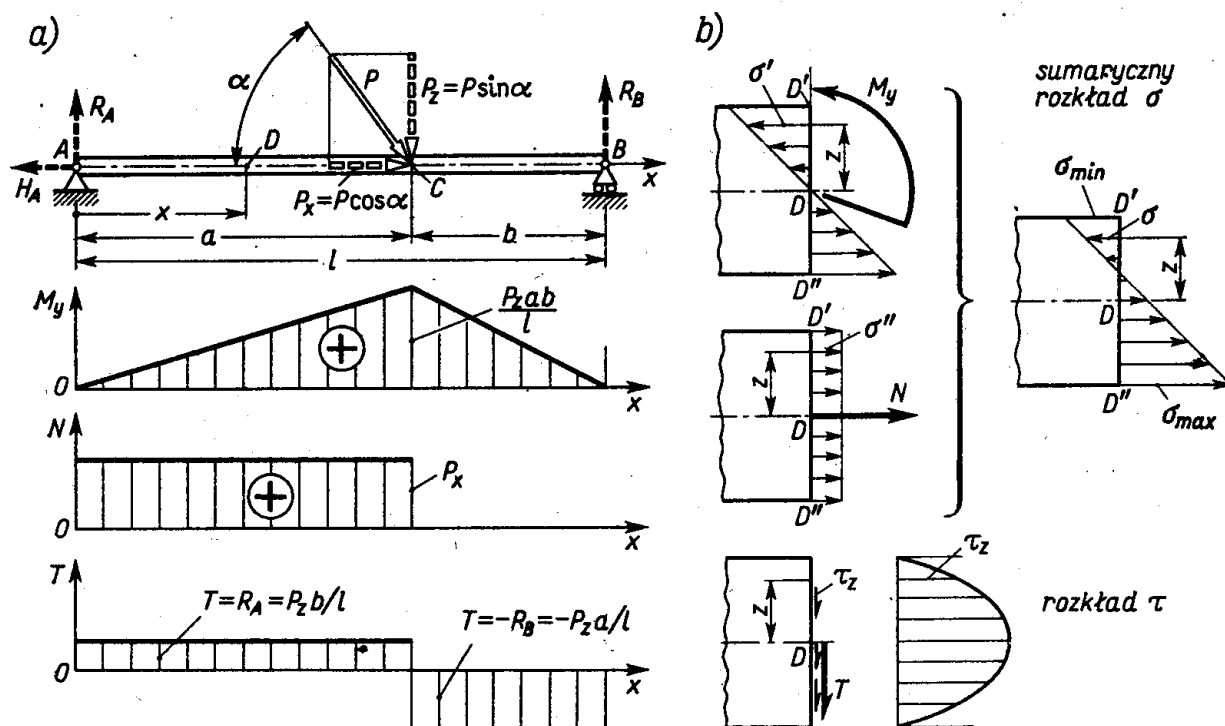
Konfrontując rys. 6.7 i 6.8 widzimy, że punkt  $B$  przesuwa się pionowo do dołu i poziomo<sup>(1)</sup> w kierunku siły  $H$ .

<sup>(1)</sup> Układ osi  $xv$  na rys. 6.8 przyjęto tak, że zwroty osi  $v$  i  $y$  są zgodne. Odcinek  $B''B'$  odpowiada  $v < 0$ , czyli w kierunku siły  $H$ .



## 6.2. Zginanie prętów krępych przy istnieniu sił wzdłużnych

Zginanie z jednoczesnym ściskaniem lub rozciąganiem występuje, gdy siły obciążające są nachylone do osi pręta (rys. 6.9a). Przypadek taki sprowadzamy do superpozycji rozpatrzonych już przypadków. Widzimy bowiem, że  $P_z$  wraz z reakcjami  $R_A$  i  $R_B$  przedstawia



Rys. 6.9. Analiza jednoczesnego zginania i rozciągania

poprzeczne zginanie, w którym wysiłek przekroju stanowią podane wykresami: siła tnąca  $T$  i moment gnący  $M_y$ . Siła  $P_x$  wraz z reakcją  $H_A = P_x$  przedstawia znany z rozdz. 2 przypadek rozciągania, w którym wysiłek przekroju stanowi siła wzdłużna  $N$  o przebiegu podanym na wykresie. Rozkłady naprężeń odpowiadające tym przypadkom składowym (rys. 6.9b) określamy ze znanych już zależności. Jeśli zgięcie jest proste, to w obranym przekroju  $D$  naprężenia  $\sigma'$  i  $\tau_z$  odpowiadające zginaniu wyznaczamy z wzorów (5.14) i (5.18), tj.

$$\sigma' = -M_y z / J_y, \quad \tau_z = T S_y^{(z)} / J_y b_z,$$

podczas gdy odpowiadające rozciąganiu naprężenia  $\sigma''$  są

$$\sigma'' = N / A.$$

Zgodnie z zasadą superpozycji, przy jednoczesnym zginaniu i rozciąganiu mamy w obranym włóknie naprężenia normalne

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = (N/A) - (M_y z / J_y), \quad (6.6)$$

a naprężenia  $\tau_z$  zostają jak powyżej. Ekstremalne naprężenia normalne występują w skraj-

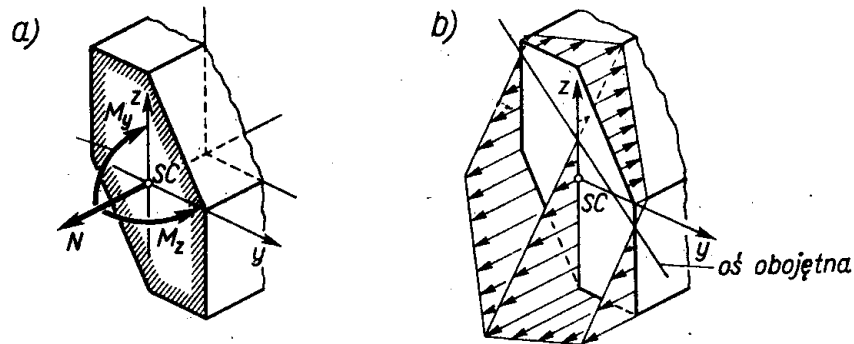
nych włóknach  $D'$  i  $D''$  i przy wykorzystaniu pojęcia wskaźników wytrzymałości  $W_y'$  i  $W_y''$  są

$$\sigma_{\min} = \frac{N}{A} - \frac{M_y}{W_y'}, \quad \sigma_{\max} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{W_y''}. \quad (6.7)$$

W przypadku ukośnego zginania i jednoczesnego rozciągania lub ściskania (rys. 6.10) naprężenia od zginania określamy z wzorów (6.1a) lub (6.4), zależnie od tego, czy centralne osie  $y$ ,  $z$  są głównymi, czy też nie. W wyniku mamy odpowiednio

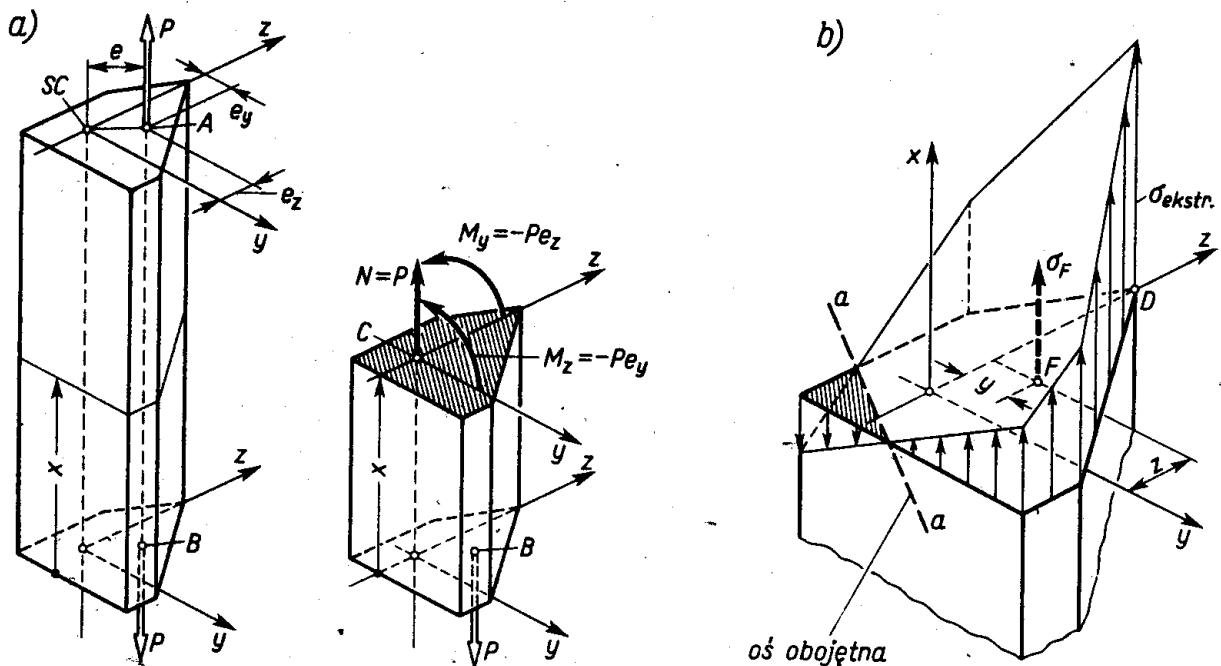
$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_y z}{J_y} - \frac{M_z y}{J_z} \quad \text{lub} \quad \sigma = \frac{N}{A} - \frac{\mathfrak{M}_y z}{J_y} - \frac{\mathfrak{M}_z y}{J_z}, \quad (6.8)$$

gdzie wielkości  $\mathfrak{M}_y$  i  $\mathfrak{M}_z$  określone są wzorami (6.3).



Rys. 6.10. Jednoczesne zginanie ukośne i rozciąganie

Szczególnym przypadkiem zginania i jednoczesnego rozciągania lub ściskania jest *mimośrodowe rozciąganie lub ściskanie*, gdy obciążenie pręta stanowią siły wzdłużne równoległe do jego osi (rys. 6.11a). Odległość  $e$  między linią działania siły a osią nazywamy



Rys. 6.11. Analiza mimośrodowego rozciągania

*mimośrodem siły*. Prowadząc myślowy przekrój i badając równowagę odciętej części otrzymujemy następujące składowe wysiłku tego przekroju:

$$N = P, \quad M_y = -Pe_z, \quad M_z = -Pe_y, \quad (a)$$

przy czym ujemne wartości  $M_y$  i  $M_z$  wynikają z konfrontacji rys. 6.11 i 6.10. Zakładając, że osie  $y$  i  $z$  są centralne główne, mamy z wzoru (6.8) dla pewnego punktu  $F$  przekroju wartość  $\sigma_F$

$$\sigma_F = \frac{P}{A} + \frac{Pe_z z}{J_y} + \frac{Pe_y y}{J_z}, \quad (b)$$

skąd wynika, że końce wektorów  $\sigma_F$  tworzą płaszczyznę. Aby wyznaczyć ekstremalne naprężenie  $\sigma_e$ , celowe jest znaleźć naprzód oś obojętną  $a-a$ , dla której  $\sigma_F = 0$ , tj.

$$(1/A) + (ze_z/J_y) + (ye_y/J_z) = 0, \quad (c)$$

a następnie określić taki punkt  $D$ , którego odległość od prostej  $a-a$  jest ekstremalna (porównaj rozumowanie w art. 6.1, rys. 6.2b).

Z zależności (c) wynika, że oś obojętna nie przechodzi przez środek ciężkości przekroju. Zależności tej nadajemy inną postać wprowadzając nowe pojęcie *promieni bezwładności*  $i_y, i_z$  względem centralnych głównych osi  $y$  i  $z$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}, \quad i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}}. \quad (6.9)$$

Dzięki czemu zamiast (c) możemy napisać

$$\frac{e_z z}{i_y^2} + \frac{e_y y}{i_z^2} + 1 = 0. \quad (6.10)$$

Z zależności tej widać, że przy dostatecznie małych mimośrodkach  $e_y$  i  $e_z$  oś obojętna jest przesunięta poza obręb materialnego przekroju pręta. To oznacza, że na całym przekroju działają jednoimienne naprężenia. Przypadek taki ma duże znaczenie w konstrukcjach inżynierskich, w których stosowane są materiały, jak cegła lub beton, mające małą wytrzymałość na rozciąganie i wielokrotnie większą wytrzymałość na ściskanie. W konstrukcjach takich pożądanym jest, aby przy mimośrodkowym ściskaniu pręta naprężenia na całym polu przekroju były ściskające. Spełnienie tego warunku jest możliwe, gdy mimośród siły nie wykracza poza pewne granice. W konstrukcjach maszynowych zagadnienie to nie ma dużego znaczenia.

Ekstremalne naprężenia  $\sigma_e$ , określone z wzorów (6.7) lub (6.8), umożliwiają ocenę bezpieczeństwa ustroju. Jak wiemy bowiem z rozdz. 5, punkty przekroju, w których występują  $\sigma_e$ , są wolne od naprężeń stycznych.<sup>(1)</sup> Właściwości tej nie zmienia istnienie siły wzdłużnej i kryterium bezpieczeństwa, tj.  $\sigma_e \leq k_r$  lub  $\sigma_e \leq k_c$  zostaje bez zmiany. Jest rzeczą oczywistą, że kryterium to musi być spełnione we wszystkich przekrojach, z czym, podobnie jak i w zginaniu belek, wiąże się poszukiwanie tzw. przekrojów niebezpiecznych.

<sup>(1)</sup> Z wyłączeniem przekrojów cienkościennych (rozdz. 13).

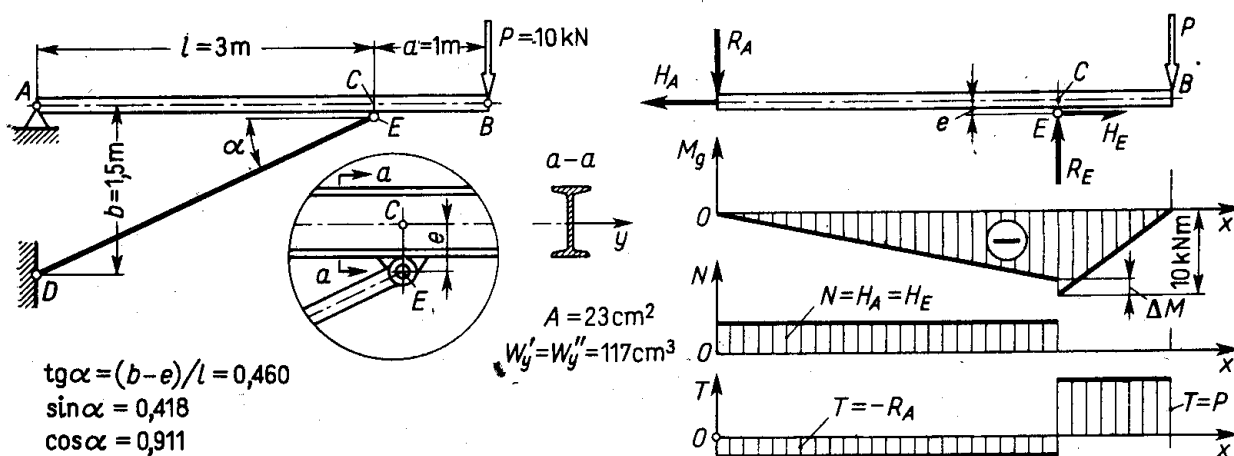
## Zadania

1. W belce (rys. 6.9)  $P = 10 \text{ kN}$ ,  $l = 3 \text{ m}$ ,  $a = 2 \text{ m}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ . Wyznaczyć naprężenia  $\sigma_e$  w niebezpiecznym przekroju, jeśli belka jest rurą o wymiarach  $d_w = 14 \text{ cm}$ ,  $d_z = 16 \text{ cm}$ .

Odp.  $P_x \approx 8,7 \text{ kN}$ ,  $P_z = 5 \text{ kN}$ ,  $W'_y = W''_y = \pi(d_z^4 - d_w^4)/32d_z = 167 \text{ cm}^3$ ,  $A = 47 \text{ cm}^2$ ; niebezpieczny przekrój tuż z lewej strony punktu  $C$ , gdzie  $N = 8,7 \text{ kN}$ ,  $M_y = 3,33 \text{ kN m}$ ; z wzoru (6.7)

$$\sigma_e = (8,7 \cdot 10^3 / 47 \cdot 10^{-4}) + (3,33 \cdot 10^3 / 167 \cdot 10^{-6}) = 21,8 \text{ MPa}.$$

2. Nieważka dwuteowa belka  $ACB$  (rys. 6.12) podparta jest prętem  $DE$ , przy czym przegub  $E$  jest umocowany na belce mimośrodkowo ( $e = 12 \text{ cm}$ ). Wyznaczyć  $\sigma_e$  w niebezpiecznym przekroju belki.

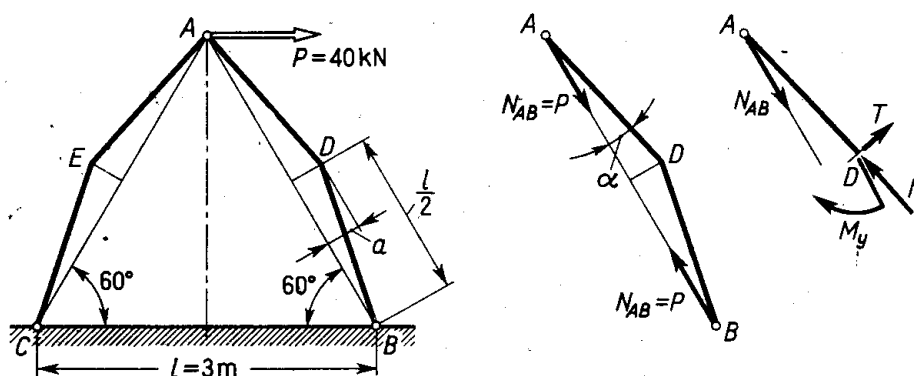


Rys. 6.12. Przykład liczbowy

Rozwiązanie. Istotne w tym zadaniu jest zbadanie roli mimośrodu  $e$ . Z warunku równowagi momentów względem  $A$  mamy ściskającą siłę w pręcie  $DE$ :  $N' = P(l + a) / b \cos \alpha = 29,4 \text{ kN}$ . Na belkę w punkcie  $E$  działają składowe  $R_E = N' \sin \alpha = 12,3 \text{ kN}$  i  $H_E = N' \cos \alpha = 26,7 \text{ kN}$ . Wykres  $M_g$  ma w punkcie  $C$  przeskok  $\Delta M$ , albowiem dla przekroju tuż na prawo od punktu  $C$  jest  $M_g = Pa = 10 \text{ kN m}$ , natomiast w przekroju tuż na lewo od tego punktu jest  $M'_g = Pa - H_E e = 6,8 \text{ kN m}$ . Badając  $\sigma_e$  w pierwszym przypadku mamy  $\sigma_e = 10 \cdot 10^3 / 117 \cdot 10^{-6} = 85 \text{ MPa}$ , natomiast w przekroju drugim  $\sigma_e = (H_E / A) + [(Pa - H_E e) / W_y] \approx 70 \text{ MPa}$ . Niebezpieczny jest więc przekrój tuż z prawej strony  $C$ .

3. W dwuprętowej kratownicy (rys. 6.13) ze względów konstrukcyjnych pręty nie są proste, lecz załamane, tj.  $AEC$  i  $ADB$  ( $a = 20 \text{ cm}$ ). Jaki wzrost naprężeń spowoduje taka modyfikacja? W obliczeniach przyjąć  $A = 23 \text{ cm}^2$ ,  $W'_y = W''_y = 117 \text{ cm}^3$ .

Odp. Pierwotnie pręt  $AB$  był ściskany, pręt  $AC$  rozciągany, przy czym  $N_{AC} = -N_{AB} = P = 40 \text{ kN}$ ,

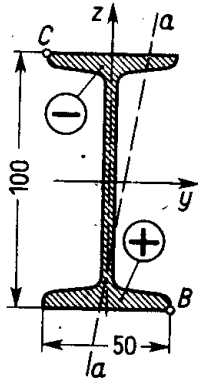


Rys. 6.13. Przykład liczbowy

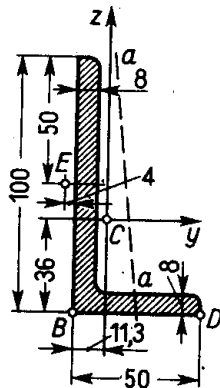
a naprężenia  $\sigma = P/A = 17,4$  MPa. Po modyfikacji każdy z prętów jest zginany i jednocześnie ścisany lub rozciągany, przy czym siły obciążające zostają bez zmian. W niebezpiecznym przekroju tuż obok wierzchołka  $D$  (lub  $E$ )

$$M_y = N_{A3} a = 8,0 \text{ kNm}, \quad N = N_{AB} \cos \alpha = 39,6 \text{ kN},$$

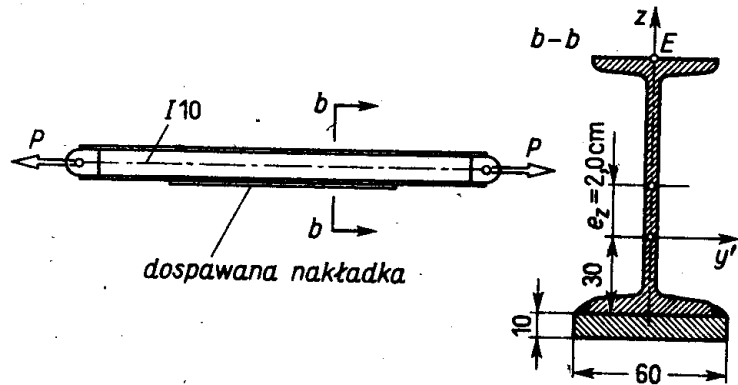
a ekstremalne naprężenia  $\sigma_e = -(N/A) - (M_y/W_y) = -85,5$  MPa są prawie 5-krotnie większe od pierwotnych. Stwierdzenie to dobitnie ilustruje ujemne skutki tego rodzaju modyfikacji.



Rys. 6.14.



Rys. 6.15.



Rys. 6.16.

4. Dwuteówka (rys. 6.14), dla której  $J_y = 171 \text{ cm}^4$ ,  $J_z = 12,2 \text{ cm}^4$ ,  $A = 10,6 \text{ cm}^2$ , ścisana jest siłą  $P = 20 \text{ kN}$  przyłożoną w punkcie  $C$ . Wyznaczyć położenie osi obojętnej oraz ekstremalne naprężenia ścisające i rozciągające.

Odp. Równanie osi obojętnej  $a-a$ :  $0,31z - 2,17y + 1 = 0$ . Ekstremalne ścisające naprężenia  $-151$  MPa w punkcie  $C$ , ekstremalne rozciągające  $113$  MPa w punkcie  $B$ .

5. Nierównoramienny kątownik ( $J_y = 116 \text{ cm}^4$ ,  $J_z = 19,5 \text{ cm}^4$ ,  $J_{yz} = -27,6 \text{ cm}^4$ ,  $A = 11,5 \text{ cm}^2$ ) rozciągany jest siłą  $P$  przyłożoną w punkcie  $E$  (rys. 6.15). Jaka może być ta siła, aby było  $|\sigma_e| < 140$  MPa.

Rozwiązanie. Musimy tu stosować drugi z wzorów (6.8), gdyż centralne osie  $y$ ,  $z$  nie są główne. Biorąc z rysunku  $e_y = -1,53 \text{ cm}$ ,  $e_z = 1,4 \text{ cm}$  i zakładając  $P_0 = 1 \text{ kN}$  mamy z wzorów (a):  $N = 1 \text{ kN}$ ,  $M_y = -14 \text{ Nm}$ ,  $M_z = 15,3 \text{ Nm}$ , a z wzorów (6.3)

$$\kappa = 1,510, \quad \mathfrak{M}_y = 11,6 \text{ Nm}, \quad \mathfrak{M}_z = 18,1 \text{ Nm}.$$

Podstawiając te dane do drugiego wzoru (6.8) mamy

$$\sigma = 0,87 - 10,0z - 92,9y \quad (\text{MPa, gdy } y \text{ i } z \text{ w m}).$$

Z obrazu osi obojętnej  $a-a$  na rysunku przekroju wynika, że niebezpieczny jest punkt  $D$  ( $y = 3,87 \text{ cm}$ ,  $z = -3,6 \text{ cm}$ ), w którym  $\sigma_D = 0,87 + 0,36 - 3,59 = -2,37$  MPa. Aby spełnić warunek  $\sigma_e = 140$  MPa, musimy  $P_0$  zwiększyć w stosunku  $140/2,37 = 59,1$ , skąd szukana wartość  $P \approx 59 \text{ kN}$ .

6. W celu zmniejszenia naprężeń w rozciąganej dwuteówce (wymiary jak w zadaniu 4) dospawano jednostronnie nakładkę (rys. 6.16). Czy takie rozwiązanie odpowiada zamierzeniom?

Odp. Nie. W konstrukcji pierwotnej  $\sigma_0 = P/A$ ; w zmodyfikowanej środek ciężkości przekroju  $b-b$  ulega przesunięciu, a mimośród  $e_z = 2,0 \text{ cm}$ . Dla przekroju  $b-b$  jest  $J'_z = 287 \text{ cm}^4$ ,  $A' = 16,6 \text{ cm}^2$  i z wzoru (b) dla punktu  $E$  mamy  $\sigma_E = 1,15(P/A) = 1,15\sigma_0$ .